

**Didaktisches
Begleitheft zu
E1 - E4**

Deutsches Institut für
Fernstudienforschung



an der
Universität Tübingen

Mathematik

Kurs für Grundschullehrer

STUDIENBRIEF

Mathematik für Grundschullehrer - Orientierungsstufe

- E 1 Mengen und ihre Darstellung
- E 2 Mengenverknüpfungen
- E 3 Kardinalzahlen, Addition und Subtraktion
- E 4 Multiplikation und Division
- E 5 Stellenwertsysteme (*vergriffen*)
- E 6 Aussageformen und ihre Erfüllungsmengen
- E 7 Teilbarkeitslehre (*vergriffen*)
- E 8 Primzahlen, Primfaktorzerlegung (*vergriffen*)
- E 9 Relationen, insbesondere Ordnungs- und Äquivalenzrelationen
- E 10 Größenbereiche
- E 11 Algorithmen, schriftliche Rechenverfahren (*vergriffen*)
- E 12 Operatorspiele
- E 13 Abbildungen und ihre Verkettung
- E 14 Verknüpfungen und ihre Eigenschaften
- E 15 Gruppen
- E 16 Einfache geometrische Begriffe (*vergriffen*)
- E 17 Bruchzahlen (positive rationale Zahlen) (*vergriffen*)
- E 18 Ganze Zahlen, rationale Zahlen
- E 19 Einfache Funktionen, Sachrechnen (*vergriffen*)

Einige vergriffene Titel werden - soweit sie aus heutiger Sicht relevant sind - zum Nachdruck vorbereitet. Einzelheiten auf Anfrage.

Weitere Projekte aus dem Bereich der Grundschulpädagogik finden Sie auf der 3. Umschlagseite.

Mathematik für Lehrer der Sekundarstufe I/Hauptschule

- HE 1 Prozent- und Zinsrechnen, Verhältnisrechnen
- HE 2 Sachrechnen in der Wirtschaft, Wachstum und Zerfall
- HE 3 Geometrie, Teil 1, Ebene Figuren und ihre Darstellung
- HE 4 Geometrie, Teil 2, Räumliche Figuren und ihre Darstellung
- HE 5 Geometrie, Teil 3, Kongruenz und Ähnlichkeit
- HE 6 Geometrie, Teil 4, Berechnungen an ebenen und räumlichen Figuren
- HE 7 Elektronische Taschenrechner
- HE 8 Dezimalzahlen
- HE 9 Gleichungen und Ungleichungen, Teil 1
- HE 10 Gleichungen und Ungleichungen, Teil 2
- HE 11 Beschreibende Statistik
- HE 12 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Mathematik für Grundschullehrer

Ein Fernstudienlehrgang

Didaktisches Begleitheft zu E1-E4

Ulrich Grevsmühl

mit einem historischen Beitrag von Gerhard Preiß

Deutsches Institut für
Fernstudienforschung
an der Universität
Tübingen



Deutsches Institut für Fernstudienforschung an der Universität Tübingen

Abteilung Wissenschaftliche Weiterbildung

Leitung: Prof. Dr. Peter Hauck

DIFF-Projektgruppe:

Dipl.- Math. Heinrich Abel

Dipl.- Math. Udo Schweizer

Wissenschaftliche Beratung:

Prof. Dr. Albrecht Abele (Heidelberg)

OStD Jürgen Kühl (Sattenfelde)

Prof. Gerhard Preiß (Freiburg)

Dr. Gisela Studeny (München)

Graphiken:

Harald Bechtle

Arnd Klotz

Ein Verzeichnis der aus Unterrichtswerken entnommenen Abbildungen findet sich auf Seite 139.

© Deutsches Institut für Fernstudienforschung an der Universität Tübingen 1995

Alle Rechte vorbehalten

Nachdruck, Vervielfältigungen und Übersetzung, auch auszugsweise, nur mit ausdrücklicher Genehmigung

des Instituts gestattet

Satzherstellung/Datenübernahme: Satz- und Reprotechnik GmbH, 69502 Hemsbach

Druck: Druckhaus Beltz, 69502 Hemsbach

Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
1. Die historische Entwicklung der Arithmetik und ihrer Methodik	9
1.1 Die mechanische Methode in der Zeit von 1500 bis 1700	9
1.2 Die beweisführende Methode im 18. Jahrhundert	10
1.3 Prinzip der Anschauung und Zählprinzip im 19. Jahrhundert	11
1.4 Professionalisierung und Differenzierung im 20. Jahrhundert	13
2. Handlungsorientierung und Veranschaulichung	17
2.1 Die Darstellungsformen nach J. S. Bruner	17
2.2 Lernen mit allen Sinnen	19
2.3 Aspekte visueller Darstellungsformen	21
2.4 Beiträge der Gestaltpsychologie	24
2.5 Vorstellungsbilder zu Zahlen und Rechenoperationen	27
2.6 Hinweise zu Lernmaterialien und Veranschaulichungsmitteln	33
3. Frühe Stadien in der Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kind	39
3.1 Verschiedene Aspekte der Verwendung der natürlichen Zahlen	39
3.2 Zahlbegriff und Zählen	40
3.2.1 Entwicklung des Zahlbegriffs nach Piaget	40
3.2.2 Zählen	42
3.2.3 Neuere Untersuchungen zur Entwicklung des Zahlbegriffs und zur Wahrnehmung	42
3.3 Entwicklung des Addierens und Subtrahierens	44
3.3.1 Konkretes Verständnis der Drei- bis Fünfjährigen	44
3.3.2 Zähl- und Rechenstrategien bei den Sechs- bis Achtjährigen	44
3.4 Schulbuchbeispiele zum Rechnen im Zahlenraum bis 20	49
4. Zahldarstellung und Stellenwert	59
4.1 Frühe Erfahrungen mit Zahlen größer als 10	59
4.2 Bündelungsprinzip und Stellenwertschreibweise	60
4.2.1 Prinzip des Bündelns und Entbündelns	60
4.2.2 Einführung der Bündelung mit kleinen Basen	63
4.2.3 Schritte zum Verständnis der Stellenwertschreibweise im Zehnersystem	65
4.3 Methodisch-didaktische Anregungen zum Bündeln und Entbündeln	68
4.4 Zahlenstrahl und Hundertertafel	73

5.	Addition und Subtraktion	78
5.1	Darstellungsformen der Addition und Subtraktion	78
5.2	Erarbeitung des Zahlenraums durch Addition und Subtraktion	83
5.2.1	Additions- und Subtraktionsstrategien	84
5.2.2	Zehnerübergang	86
5.2.3	Erarbeitung des kleinen Einpluseins und Aufgabennetze	88
5.2.4	Rechnen im Hunderter- und Tausenderraum	88
5.2.5	Typische Fehler beim nichtschriftlichen Addieren und Subtrahieren	90
5.3	Methodisch-didaktische Anregungen und Schulbuchbeispiele zur Addition und Subtraktion	92
5.3.1	Methodisch-didaktische Anregungen und Schulbuchbeispiele zur Addition und Subtraktion	92
5.3.2	Schulbuchbeispiele	101
6.	Multiplikation und Division	108
6.1	Grundvorstellungen und Darstellungsformen der Multiplikation	108
6.2	Grundvorstellungen und Darstellungsformen der Division	114
6.3	Erarbeitung des Zahlenraums durch Multiplikation und Division	119
6.3.1	Rechenstrategien beim Multiplizieren und Dividieren	119
6.3.2	Erarbeitung des kleinen Einmaleins und Aufgabennetze	121
6.3.3	Division mit Rest	122
6.4	Weitere Themen zur Multiplikation und Division	123
6.4.1	Rechnen im Hunderter- und Tausenderraum	123
6.4.2	Multiplikation und Division mit der Null	125
6.4.3	Typische Fehler beim kleinen Einmaleins und beim nichtschriftlichen Multiplizieren und Dividieren	126
6.5	Methodisch-didaktische Anregungen zur Multiplikation und Division ...	128
	Literaturverzeichnis	134
	Sachregister	140

Vorwort

In den Jahren 1972 bis 1976 wurde am Deutschen Institut für Fernstudien an der Universität Tübingen (DIFF) in Zusammenarbeit mit einem wissenschaftlichen Beirat und zahlreichen Kolleginnen und Kollegen aus dem Bereich der Didaktik und Schulpraxis der Fernstudienlehrgang „Mathematik für Grundschullehrer“ entwickelt. Ziel des Lehrgangs sollte sein, die Modernisierung des Mathematikunterrichts für den Bereich der Grundschulen durch eine Fortbildung der Lehrerinnen und Lehrer zu unterstützen.

Dabei kamen u. a. folgende Gesichtspunkte zum Tragen, wie in der Inhaltsübersicht von 1971 und in Studieneinheit E 1 ausgeführt wurde: „Neben der Beherrschung der Grundrechenarten soll die Grundschule jetzt auch verschiedenartige Ansätze zu mathematischem Denken vermitteln, die nicht auf den Umgang mit Zahlen beschränkt sind. Die Arbeitsweise ist durch Unterrichtsformen gekennzeichnet, bei der die Eigentätigkeit der Kinder im Vordergrund steht. (...) Neue 'mathematische' Gegenstände (...), wie etwa der Mengenbegriff und die verschiedenen Stellenwertsysteme, sollen vielmehr nur den Rahmen abgeben für die Entfaltung von geistigen Aktivitäten und produktiven Denkansätzen“.

Der Lehrgang reicht mit seinen 19 Studieneinheiten inhaltlich über die Grundschule hinaus und umfasst noch wesentliche Teile des Mathematikunterrichts im 5., 6. und 7. Schuljahr. Die fünf Studieneinheiten, die vor allem über die Grundschule hinausgehen, sind mit dem Zusatz „Orientierungsstufe“ versehen worden (unten mit * gekennzeichnet).

Überblick über den Lehrgang

Inhaltsübersicht

- E 1 Mengen und ihre Darstellung
- E 2 Mengen Verknüpfungen
- E 3 Kardinalzahlen, Addition und Subtraktion
- E 4 Multiplikation und Division
- E 5 Stellenwertsysteme
- E 6 Aussageformen und ihre Erfüllungsmengen
- E 7 Teilbarkeitslehre *
- E 8 Primzahlen, Primfaktorzerlegung *
- E 9 Relationen, insbesondere Ordnungs- und Äquivalenzrelationen
- E 10 Größenbereiche

- E 11 Algorithmen, schriftliche Rechenverfahren
 - E 12 Operatorspiele
 - E 13 Abbildungen und ihre Verkettung
 - E 14 Verknüpfungen und ihre Eigenschaften
 - E 15 Gruppen
 - E 16 Einfache geometrische Begriffe
 - E 17 Bruchzahlen (positive rationale Zahlen) *
 - E 18 Ganze Zahlen, rationale Zahlen *
 - E 19 Einfache Funktionen, Sachrechnen *
- (* Studieneinheiten mit Hinweis „Orientierungsstufe“)

In den Jahren des Erscheinens dieser Studieneinheiten beanspruchte die Reform des Mathematikunterrichts großes allgemeines Interesse. Verzerrend mit dem Begriff „Mengenlehre“ in enge Verbindung gebracht, sorgte sie für erhebliche Unruhe und Unsicherheit. Zu einer Zeit, als die fachliche Systematik an etlichen Stellen übermäßig großen Einfluss auf die Didaktik gewann, haben die für den Grundschullehrerkurs Verantwortlichen versucht, einerseits die fachlichen Grundlagen exakt und in verständlicher Form darzustellen, dazu aber, besonders in den didaktischen Teilen, mäßigend zu wirken.

Die Darstellung trägt selbstverständlich an vielen Stellen den Stempel ihrer Entstehungszeit. Da die Grundkonzeption viel Resonanz gefunden hat und noch findet, wurde die Möglichkeit einer Überarbeitung, die sicher wünschenswert ist, geprüft: Die Gelder für eine überarbeitete Neuauflage stehen nicht zur Verfügung.

So ist die Entscheidung für einen im wesentlichen unveränderten Nachdruck der Studieneinheiten E1 bis E4 und für ein zusätzliches Begleitheft gefallen. Der Nachdruck der Einheit E5 (Stellenwertsysteme) wird unterbleiben, weil das Rechnen in anderen Systemen als dem Zehnersystem heute kaum praktiziert wird und weil diese Einheit für das Verständnis der übrigen Einheiten nicht nötig ist.

Das vorliegende Begleitheft soll vor allem die Einheiten E3 und E4 ergänzen und erweitern - diese Einheiten haben die Einführung und Behandlung der Grundrechenarten zum Gegenstand. Es wird versucht, die theoretische Grundlage zu aktualisieren; so werden z. B. mit der knappen Darstellung einiger Ansätze von J. S. Bruner und mit der Berücksichtigung von Beiträgen der Gestaltpsychologie Bereiche angesprochen, die in der neueren didaktischen Forschung (wieder) Bedeutung erlangt haben und die für den Unterrichtsalltag von Belang sind.

Im Vordergrund stehen jedoch die Hilfen und Hinweise für die Unterrichtspraxis. Eine wesentliche Absicht dieser Darstellung ist, die Sensibilität der Lehrerinnen und Lehrer für die Voraussetzungen und Möglichkeiten der Kinder zu vertiefen und zu erweitern. Darum wird kein geschlossener Lehrgang angeboten; es sind vielmehr vor einem verständlichen wissenschaftlichen Hintergrund Inhalte und Methoden des Anfangsunterrichts aufgezeigt, die eine Anpassung an die jeweils gegebene Unterrichtssituation ermöglichen.

So sollen z. B. die sehr ausführliche Darstellung der Rechenstrategien bei der Addition (5.2.1) oder die Aufzählung der Fehlerarten (5.2.5) dazu beitragen, den Blick für die ungemein vielfältigen Gedankengänge der Kinder zu schärfen.

Trotz der Randposition, die das Thema Stellenwertsysteme heute einnimmt, ist diesem Bereich ein eigenes Kapitel gewidmet, weil die Begriffe Stellenwert und Bündelung auch für das Rechnen im Zehnersystem von großer Bedeutung sind und weil der vollständige Verzicht der jetzigen Lehrpläne auf andere Stellenwertsysteme als das Zehnersystem sicher nur eine vorübergehende Erscheinung ist.

Die in diesem Begleitheft angesprochenen Themen werden durch zahlreiche Beispiele aus aktuellen Unterrichtswerken illustriert, die ein breites Spektrum möglicher Ansätze aufzeigen. Den unterrichtenden Kolleginnen und Kollegen soll damit ein leicht zugänglicher Überblick geboten werden, der die Einordnung des jeweils benutzten Werkes erleichtert und zu unterrichtlichen Ergänzungen anregt.

Das erste Kapitel gibt einen Überblick über die historische Entwicklung der Arithmetik und ihrer Methodik, um das Verständnis für die geschichtlichen Zusammenhänge zu pflegen. Ein Mangel bei der Reformbewegung der siebziger Jahre war nämlich der vollständige Bruch mit der Tradition. Man versuchte einen totalen Neuanfang und versäumte dabei, bewährte Methoden und Verfahren für einen zeitgemäßen Mathematikunterricht nutzbar zu machen.

Bei der Fülle der derzeit existierenden Vorschläge für mathematische Unterrichtsaktivitäten erhebt das vorliegende Begleitheft keinen Anspruch auf Vollständigkeit; auch auf die Zukunftsentwicklungen, die sicher stark von Taschenrechner, PC usw. beeinflusst werden, konnte es nicht eingehen.