1. Die historische Entwicklung der Arithmetik und ihrer Methodik

Seit der Mitte des 15. Jahrhunderts verbreitete sich die Kenntnis einer *neuen Arithmetik* von Italien aus nach Deutschland. Kennzeichen dieser neuen Rechenkunst sind die zehn indischen Ziffern, das dezimale Stellenwertsystem und die daraus erwachsenden schriftlichen Rechenverfahren.

Das früheste uns überlieferte Lehrbuch zum Rechnen mit den indischen Ziffern stammt vom muslimischen Mathematiker *Mohammed ihn Musa Alchwarizmi,* der um 840 gestorben ist. Vom ursprünglich arabischen Text der Arithmetik Alchwarizmis ist nur eine unvollständige Handschrift in lateinischer Übersetzung erhalten geblieben, die im 13. Jahrhundert geschrieben wurde. Der Name *Alchwarizmi* wurde in *Algorizmi* übertragen, woraus sich dann später das Wort *Algorithmus* ergab, eine Bezeichnung für spezielle mathematische Methoden zum schrittweisen Lösen von Aufgaben nach einem vorgegebenen Verfahren. Die bekanntesten Algorithmen, auf die sich diese Bezeichnung zunächst auch allein bezog, sind die schriftlichen Verfahren der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division natürlicher Zahlen.

1.1 Die mechanische Methode in der Zeit von 1500 bis 1700

Der Rechenunterricht in Deutschland stand in der Zeit der Einführung der neuen Arithmetik und bis ins 17. Jahrhundert im Dienste des *materiellen Prinzips:* Als erstes Ziel des Unterrichts galt fast ausschließlich sicheres Rechnen und fehlerfreies Lösen praktischer Aufgaben. Den Schülern wurden Regeln vorgesetzt, die an Beispielen erläutert und so lange eingeübt wurden, bis mechanische Fertigkeit sichergestellt war. Fragen, *warum* so zu rechnen ist, wurden nicht gestellt, und nur in wenigen Büchern findet man Hinweise auf Begründungen.

Eine der Ausnahmen bildet das Rechenbuch des Frankfurter Rechenmeisters *Simon Jakob* aus dem Jahr 1557, der im Schlusswort betont, wie wichtig einsichtiges Rechnen ist, und zusammenfassend feststellt:

Ist doch zwischen zweyen rechnern/ der einer auß gelehrnter gewonheit und Regel/ derander aber mit vernunfft und fürsichtigkeit arbeyt/ wol so ein grosser underscheid/ als zwischen einem blinden und sehenden.

Der berühmteste Vertreter der mechanischen Methode ist *Adam Riese*, im gleichen Jahr 1492 geboren, in dem Christoph Kolumbus Amerika entdeckte, geehrt als „des deutschen Volkes Rechenlehrer". Sein erfolgreiches (zweites) Rechenbuch von 1522 hat bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts über 100 Auflagen erlebt und für die wirtschaftliche Entwicklung in Deutschland einen bedeutenden Beitrag geleistet. Adam Riese hat, eingebunden in eine lange Tradition, das „trockene" Rechnen durch eine schöne Sammlung unterhaltsamer Aufgaben aufgelockert.

Ein Beispiel zur Unterhaltungsmathematik aus dem (zweiten) Rechenbuch von Adam Riese (zitiert aus Jakob, S., Franckfort 1574, S. 60 L):

Item einer hat gelt/ verspilt darvon 1/3. verzehrt vom übrigen 4 Gulden. mit dem andern handelt er/ verleuret ein viertheil/ und behelt 20 Gulden. wie viel hat er zum ersten außgeführet?

Es folgt das Rezept zur Lösung, hier die sogenannte *Regula Falsi:* Mach es also ... und dann die Aufforderung zum Ausrechnen und das Ergebnis: Vollführe es/ so kommen 46 Gulden. so viel hat er gehabt.

Das Rechnen in der Zeit von Adam Riese war geprägt durch den Übergang von der alten Methode, dem *Rechnen auf der Linie* (spezielles Rechenbrett mit Rechensteinen), zur neuen Methode, dem *Rechnen mit der Feder* (schriftliches Rechnen). Die damals üblichen Formen des schriftlichen Rechnens bei Addition, Subtraktion und Multiplikation entsprechen etwa den heutigen; dagegen bildete sich unsere Form der schriftlichen Division erst im 18. Jahrhundert aus.

1.2 Die beweisführende Methode im 18. Jahrhundert

Im 18. Jahrhundert änderten sich die Vorstellungen von einem guten Rechenunterricht. Neben oder gar über das Ziel einer Gewandtheit in der Rechenkunst und ihren Anwendungen trat der Anspruch einer Verstandesbildung durch Mathematik. Kein anderes Fach schien besser geeignet, den Verstand zu üben und die Urteilskraft zu schärfen. *Das formale Prinzip* verlangte die beweisführende Methode anstelle der rein mechanischen. Es entstanden die ersten methodischen Handbücher mit Reflexionen über Stoffauswahl, Förderung von Verständnis, Fortschreiten in Stufen und Veranschaulichungen.

Ein Auszug aus der Vorrede zu den „Anfang s gründen aller mathematischen Wissenschaften" von *Christian Freyherr von Wolff* von 1710 soll auch den großen Optimismus zeigen, mit dem der allgemeine Wert einer mathematischen Bildung vertreten wurde:

Der große und vielfältige Nutzen hat in unseren Tagen die mathematischen Wissenschaften so beliebt gemacht, daß sie wohl niemals in so hohem Werthe gewesen, und mit solchem Eifer getrieben worden sind. Und was ist es Wunder? So jemand über die Kräfte des menschlichen Verstandes sich erfreuet, der findet hier einen unvergleichlichen Schatz der herrlichsten Proben, wie weit man durch rechten Gebrauch derselben kommen kann. ... Derowegen ist kein gewisserer Weg, zur Erkänntniß der Kräfte des menschlichen Verstandes zugelangen, als wenn man mit Ernst die mathematischen Wissenschaften treibt, ... Und aus dieser Absicht liessen die alten Griechen niemand studiren, er hätte denn zuvor die Rechenkunst und Geometrie inne: welchem löblichem Exempel heut zu Tage die Franzosen und Engelländer rühmlich und mit großem Nutzen nachfolgen.

1.3 Prinzip der Anschauung und Zählprinzip im 19. Jahrhundert

Am Anfang der Pädagogik des 19. Jahrhunderts steht *Heinrich Pestalozzi* (1746 - 1827), der einen tiefgreifenden und lange andauernden Einfluss auf die deutschen Schulen ausübte, wie die Pädagogikbücher dieses Jahrhunderts zeigen. In einer um 1900 geschriebenen Geschichte der Pädagogik liest man (Leutz 1905, S. 207): „Pestalozzis Name ist der gefeiertste im Kreise deutscher Pädagogen; er gilt als der 'König der neuen Pädagogik', als 'der Genius der christlich humanen Pädagogik'." Mit dem Namen von Pestalozzi wird vor allem das *Prinzip der Anschauung* verbunden. Der Rechenunterricht soll von der Anschauung ausgehen und dem Entwicklungsstand der Kinder entsprechend in Stufen erfolgen.

Nun ist es keineswegs so, dass das Prinzip der Anschauung erst von Pestalozzi für die Pädagogik entdeckt worden wäre. Die „Große Didaktik", die *Johann A. Comenius* 1628 in Druck gab, enthält im 20. Kapitel als *Goldene Regel* für Lehrer die eindringliche Mahnu Alles ist, soweit nur immer möglich, den Sinnen vorzuführen; Sichtbares dem Gesichte, Hörbares dem Gehör, ... ; und wenn etwas von mehreren Sinnen zugleich erfaßt werden kann, so soll es auch mehreren Sinnen zugleich vorgeführt werden. Jedoch war die Zeit des Dreißigjährigen Krieges, in der Comenius lebte, für eine Umsetzung neuer pädagogischer Ideen denkbar ungeeignet.

Zurück zu *Pestalozzi:* Nach seiner Meinung ist es falsch, die Kinder lediglich „rechnen zu lehren", vielmehr sei es der Zweck der Rechenübungen, die „Vernunftanlage" des Menschen zur „Vernunftkraft" zu erheben. Die Schüler sollen zunächst zur richtigen Anschauung, von da zum richtigen Denken und vom richtigen Denken endlich zum richtigen Rechnen geführt werden. Pestalozzi erhob das Rechnen zum Mittelpunkt des Unterrichts, doch gerieten seine eigenen praktischen Vorschläge leider zu überaus einförmigen und ermüdenden Übungen. In den ersten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts wurde eine Reihe neuer Rechenbücher entwickelt (Tillich, Türk, Scholz, Diesterweg und Heuser, Hentschel, Stubba, Stern u. a.), in denen das Prinzip der Anschauung besser zum Tragen kam.

Einen mächtigen Anstoß erfuhr der Rechenunterricht durch *Grube* mit seinem „Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule nach den Grundsätzen einer heuristischen Methode" von 1842. „Der Elementarschüler lerne die Zahlen nicht vereinzelt und abgerissen nach den Operationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens und Dividierens, sondern jede Zahl (im Räume von 1 - 100) allseitig nach jenen Operationen in ihrer organischen Einheit kennen und behandeln." (S. 19) Die Behandlung jeder Zahl umfasste:

/. *Die reine Zahl;* Messen und Vergleichen (Zahlbild, Name, Ziffer und alle vier Rechenarten), Schnellrechnen, Kombinieren

//. *Die angewandte Zahl* (Größen, Sachrechnen)

Grube sieht seinen Vorschlag als *Denkrechnen* im Gegensatz zum bisherigen *Regelrechnen*. Er fordert überdies, dass jede Rechenstunde zugleich *Sprachstunde* sein müsse.

Die *allseitige Behandlung der Zahlen* nach dem Vorschlag von Grube wurde in den letzten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts zunehmend kritisiert; sie sei auf falschen Prinzipien aufgebaut und wirke zudem auf die Kinder langweilig und abstumpfend. In gemäßigter Form wurden die Ideen von Grube in die *Zahlbildmethode* integriert, welche Zahlbilder als wichtigste Veranschaulichung für das erste Rechnen betrachtet. Punkte seien unter allen Bildern, wodurch man Zahlen veranschaulichen kann, die einfachsten. Im täglichen Leben kenne man solche Zahlbilder schon lange vom Würfel, von Dominosteinen oder von Spielkarten. Unterschiedliche Meinungen herrschten über die Formen der Punkteanordnung und ihre Reichweite (nur bis 10, bis 12, bis 20 oder noch weiter). Zwei Beispiele von Zahlbildern für viele (Lietzmann!912, S. 29 ff.):

Gottlieb Busse (1756-1835) Adolf Böhme (1816-1892)

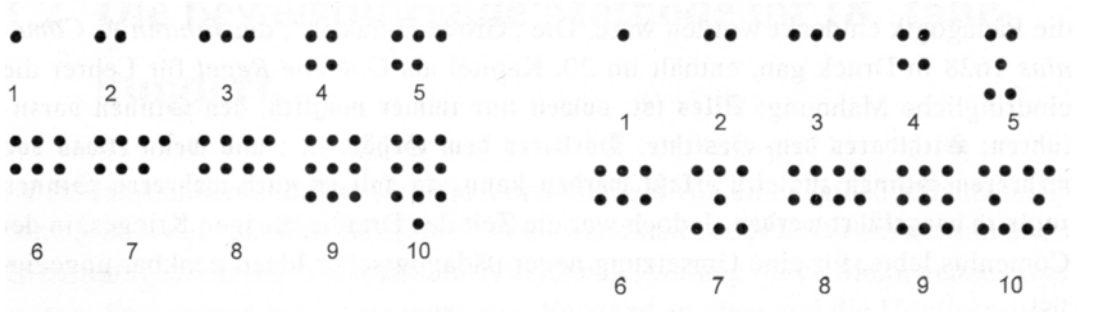

Abb. 1

Die *allseitige Betrachtung der Zahlen* und die *Zahlbildmethode,* die noch am Ende des 19. Jahrhunderts in den meisten deutschen Schulen zu finden waren, führten zu einer Gegenbewegung, der *Zählmethode:* Das Zählen wird zur Grundlage alles Rechnens. Den Zahlbegriff gewinne man nicht durch Anschauung, sondern allein durch den Zählakt. Bei kleinen Anzahlen (bis zu fünf) geschehe das Zählen so rasch, dass es nicht ins Bewusstsein dringt. Das Addieren ergibt sich bei der Zählmethode durch Zuzählen, das Subtrahieren durch Rückwärtszählen und die Multiplikation durch zusammengefasste Addition.
Bei *Tanck,* der zu den ersten Vertretern einer konsequenten *Zählmethode* gehört (1881), liest man: „In dem so außerordentlich einfachen Vorgang des Zählens haben

wir eine Erfindung, deren Bedeutung nicht leicht überschätzt werden kann. Wir haben in ihm, dem Zählen, nicht bloß ein Mittel, uns über jede Anzahl ein genaues und sicheres Wissen zu verschaffen, sondern es ist zugleich die Keimzelle der gesamten Mathematik und bildet fortdauernd die einzige und sichere Grundlage alles mathematischen Wissens." (Tanck 1906, S. 5)

Unter den Methodikern gab es auch Stimmen, die beiden Hauptprinzipien, das *Anschauungsprinzip* und das *Zählprinzip,* miteinander zu verbinden. So entstanden Vorschläge zum *anschaulichen Zählen* bzw. zum *zählenden Anschauen.*

Friedrich Unger nennt am Ende seines Buches „Die Methode der praktischen Arithmetik in historischer Entwicklung" von 1888 drei *Grundforderungen,* die an eine zweckmäßige Methode für den Rechenunterricht zu stellen sind (S. 233): *sachgemäß, natürlich* und *praktisch.* Die zweckmäßige Methode muss der „Natur des Gegenstandes" (sachgemäß) und der „Natur des Kindes" (natürlich) angemessen sein und bewirken, dass der Schüler „die Praxis des Lebens leicht und sicher beherrscht, sobald er mit ihr in Berührung kommt" (praktisch).

1.4 Professionalisierung und Differenzierung im 20. Jahrhundert

Die Rechenmethoden zu Beginn des 20. Jahrhunderts waren noch geprägt durch den Gegensatz von *Anschauern* und *Zählern.*

Für die *Anschauer* war die *simultane* Auffassung die psychologisch primäre Form, in der Zahlen wahrgenommen werden. Entsprechend stellten sie die *Zahlbilder* in den Vordergrund ihrer Methode.

Auf der anderen Seite sahen die *Zähler* in der *sukzessiven* Auffassung die psychologisch richtige Form der Zahlwahrnehmung. Deshalb diente die *Zahlenreihe* als wichtigstes methodisches Hilfsmittel.

Von beiden Seiten wurden zahlreiche *Lehr- und Lernmittel* - teilweise alte, teilweise neu erfundene - zur Unterstützung der Anschauung und der Tätigkeiten eingesetzt: Tafeln mit Knöpfen oder Scheiben, russische Rechenmaschine, Rechenbretter, Rechengestelle, Leitern, Stabbündel, verschiedene Formen von Baukästen und besondere Apparate (in ihren speziellen Ausführungen jeweils durch die Namen der Erfinder gekennzeichnet). Neben dem Gesichtssinn sollten auch Gehör- und Tastsinn angesprochen werden.

Das *Fingerrechnen* hatte seine Anhänger und seine Gegner. Die Pflege des *Kopfrechnens* war ein anerkanntes Anliegen.

Das *Rechnen der Naturvölker* wurde eingehend erforscht (Fettweis 1927), und es wurde der Frage nachgegangen, ob sich aus diesen Erkenntnissen das strittige Problem der richtigen Rechenmethode entscheiden ließe. Es ergaben sich interessante Aspekte einer Parallelität zwischen der Entwicklung der Zahlvorstellung bei Kindern und bei Naturvölkern. Doch wurde ausdrücklich davor gewarnt (Katz 1913, S. 33), einen Unterrichtsgang zu empfehlen, der den bei Naturvölkern beobachteten Stufen folgt. Unsere Kinder seien in einen anderen sozialen und kulturellen Zusammenhang gestellt als die Angehörigen eines Naturvolkes.

In vielen älteren Pädagogikbüchern wird über das *Wesen der Zahl* bzw. über die *wahre Natur der Zahl* spekuliert. Die folgende Auswahl stammt aus Büchern, die um 1900 entstanden (Graß 1911, S. 14, Räther 1909, S. 26):

„Die Zahl ist der Ausdruck einer Menge von Dingen einer Art."

„Die Zahl ist der Begriff einer Menge gleicher Größe."

„Die Zahl ist eine bestimmte (durch Eins gemessene) Vielheit."

„Die Zahl ist das, was die Menge gleichartiger Dinge bestimmt.[11]'

„Die Zahl ist das Maß der Vielheit,"

„Die Zahl ist das Produkt des Zählens."

„Die Zahl ist überhaupt gar nicht (wie die Begriffe Vogel, Tier, Gegenstand) das natürliche Ergebnis psychologischer Vorgänge, sondern sie ist das Ergebnis einer Erfindung, der Erfindung des Zählens."

„Und so kommen wir schließlich dazu, erklären zu müssen, dass die Zahlen sowohl Dinge wie auch eine eigentümliche Art von Verhältnissen oder Beziehungen bezeichnen, dass sie also Objektbegriffe und Beziehungsbegriffe zugleich sind."

Diese Versuche, zu beschreiben, was "eine (natürliche) Zahl *ist,* erfüllen natürlich nicht die strengen Kriterien einer mathematischen Definition. Die Mathematik hatte damals zwei Zugänge zu den natürlichen Zahlen entwickelt, den *kardinalen* über gleichmächtige Mengen und den *ordinalen* über geordnete Mengen. Diesen beiden Zugängen entsprechend verwendet man die Begriffe *Kardinalzahlen* und *Ordinalzahlen.* Auf den kardinalen Zugang zu den natürlichen Zahlen berufen sich die 'Anschauer', auf den ordinalen Zugang die 'Zähler'. So kann man den Streit über die beste Rechenmethode übertragen auf die Frage, ob für Kinder die kardinale oder die ordinale Sichtweise der natürlichen Zahlen näherliegend ist. Dieses Problem beschäftigt auch zum Ende des 20. Jahrhunderts noch die Didaktik. Trotz immer neu angestellter empirischer Untersuchungen herrscht keine Einigkeit über eine einfache Antwort. Man kann aber feststellen, dass die Frage gar *keine einfache Antwort* zulässt. Der Lernprozess eines Kindes auf dem langen Weg zum Erwerb des Zahlbegriffs muss sehr differenziert gesehen werden, da er aspektreich und zudem individuell verläuft.

Das Jahr 1916 darf als ein Markstein in der Rechendidaktik des 20. Jahrhunderts betrachtet werden. Es erschien „Der Neubau des Rechenunterrichts" von *Kühnel.* Im Vorwort von 1950 zur 8. Auflage kann man lesen: „Kühnels Lebenswerk ist heute noch wie seit 34 Jahren *das* Standardwerk für den Rechenunterricht. Wohl kein Schulhaus in Deutschland, kein rechenmethodisches Werk und kein Lehrplan der letzten Jahre blieb unbeeinflusst von Kühnel." Kühnel selbst geht nur kurz auf den „Streit der Zähler und Anschauer" ein. Jedes auf die Spitze getriebene Prinzip sei einseitig, es haben „allein weder die Zähler noch die Anschauer recht". Man könne sich auf psychologischem Boden sofort einigen. „Dieses Einigen bedeutet hier tatsächlich ein Vereinigen." (S. 83)

Als Grundlage für die Entstehung des Zahlbegriffs beim Kind nennt Kühnel auch *psychische Elemente,* z. B. Bekanntheitsgefühl, Gefühlsbetontheit, Bewusstsein von Identität oder von Wechsel. Besonders aber müsse der Blick auf Vergleich und Zusammenfassung gerichtet werden. Schließlich erhalte der Zahlbegriff einen festen Grund durch das assoziierte Zahlwort: „So besteht das Wesen des Zahlbegriffs ursprünglich darin, dass wir uns der Gleichartigkeit und Nichtidentität psychischer Erlebnisse bewusst werden und eine begrenzte Menge von ihnen zu einer Einheit zusammenfassen, der wir das Zahlwort als Begriffssymbol assoziieren." (S. 29)

Die Bestrebungen der Reformpädagogik und der Arbeitsschule zu Beginn des 20. Jahrhunderts erfuhren durch die Zeit des Nationalsozialismus und des 2. Weltkriegs eine Unterbrechung. Danach kam eine Fortsetzung bzw. ein Neubeginn nur allmählich in Gang.

In den USA führte der *Sputnikschock* (Start des ersten sowjetischen Satelliten, Sputnik l, am 4.10.1957) zu intensiven Überlegungen, ob der bisherige Mathematikunterricht an den Schulen auf das kommende Raumfahrtzeitalter genügend vorbereite. Es wurde eine *New Math* gefordert. In Europa wies in den 60er Jahren die OECD (Organisation für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung) durch verschiedene Schriften auf die Notwendigkeit eines modernen Mathematikunterrichts hin und hob den Zusammenhang mit der *wirtschaftlichen Entwicklung* eines Landes hervor. Diese internationalen Bemühungen um eine Reform des Mathematikunterrichts wurden auch in Deutschland aufgegriffen und führten zu „Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen" der *Kultusministerkonferenz* von 1968. Im Vorspann der *Empfehlungen und Richtlinien,* die den Mathematikunterricht in der Bundesrepublik Deutschland wesentlich beeinflusst haben, kann man lesen: „Nur wenn der Mensch frühzeitig Einsichten in naturwissenschaftliche Betrachtungsweisen und Verständnis für mathematische Strukturen gewonnen hat, kann er die Probleme lösen, vor die er in der modernen, rationalisierten Welt gestellt ist. Der Schule erwächst die Aufgabe, eine Grundbildung zu vermitteln, die auch auf ein mathematisches Erfassen unserer Wirklichkeit gerichtet ist."

In der Öffentlichkeit erhielt die Reform nach dem „1. Themenkreis: Mengen und ihre Verknüpfungen" die Bezeichnung *Mengenlehre.* Leider geschah die Umsetzung in die Schulwirklichkeit übereilt mit einer Überlast an mathematischen Strukturen. Die Mathematikdidaktik beschäftigte sich überwiegend mit mathematischen Analysen des Schulstoffes und den daraus sich ergebenden Methoden, vernachlässigte aber die menschlichen Bedingungen und die subjektiven Befindlichkeiten. Dies wirkte sich vor allem für den Bereich der Grundschulen negativ aus und rief eine konservative Gegenbewegung hervor. Stimmen, die vor der „Gefahr des Logizismus im elementaren Rechenunterricht" warnen, erhoben sich übrigens bereits zu Beginn des 20. Jahrhunderts (Katz 1913, Einleitung).

Im Jahre 1972 kam in der Bundesrepublik Deutschland der erste elektronische Taschenrechner auf den Markt, fünf Jahre später der erste Personal Computer, Die neue technische Entwicklung schritt rasch voran, und die anfänglich hohen Preise gingen auf ein Niveau zurück, das eine Anschaffung durch Privatpersonen und Schulen möglich machte. Der Taschenrechner wurde mehrheitlich als Rechenhilfsmittel ab Klasse 7 empfohlen und löste Rechenstab und Logarithmentafel ab. Das Arbeiten mit dem Personal Computer wurde nach und nach zu einem festen Bestandteil des Unterrichts an den weiterführenden Schulen. Durch die neue Technik verlieren schriftliches Rechnen und Bruchrechnen an praktischer Bedeutung, wogegen Kopfrechnen, Überschlagsrechnen und Zahlenverständnis noch wichtiger werden. Das richtige Maß an Pflege der alten Rechentechniken, in Abwägung verschiedener Gesichtspunkte wie Erhaltung eines Kulturgutes, Bedeutung als Übungsfeld für sorgfältiges Arbeiten, Verlust an praktischer Notwendigkeit, muss zum Ende des 20. Jahrhunderts erst noch gefunden werden.

Die rein mathematische Definition der natürlichen Zahlen beleuchtet die abstrakte Struktur und dient als Hintergrund zum besseren Verständnis der Methoden, liegt aber auf einer ganz anderen Ebene als die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kind. In der neuen Mathematikdidaktik hat sich allgemein durchgesetzt (vgl. z. B. Müller/ Wittmann 1977, S. 166 ff.), den Zahlbegriff, wie er sich beim Kind bilden soll, in den verschiedenen *Zahlaspekten* zu sehen, die man dem Kind nach und nach vermitteln will. Zu diesen Zahlaspekten gehören:

ordinaler Aspekt (Zählzahl, Ordnungszahl), „der wievielte?";

kardinaler Aspekt (Anzahl), „wie viele?";

Operatoraspekt (Vielfachheit), „wie oft?";

Maßaspekt, Größenaspekt (Maßzahl von Größen); „wie lang?“, „wie groß?", „wie schwer?";

Rechenzahlaspekt (Rechenoperationen, Rechenverfahren), „wie wird gerechnet?";

Codierungsaspekt (Telefonnummern, Postleitzahlen, ...), „welche Nummer?".

Das Kind soll in der Schule anschaulich und handelnd die verschiedenen Aspekte der natürlichen Zahlen kennenlernen. Aus der Summe dieser Erfahrungen entwickelt sich beim Kind der Begriff der Zahl, wobei - wie schon Aristoteles richtig feststellte - das Ganze mehr ist als die Summe seiner Teile.